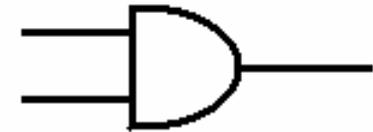


DASAR ALJABAR BOOLEAN

Dalam mengembangkan sistem Aljabar Boolean
Perlu memulainya dengan asumsi – asumsi
yakni Postulat Boolean dan Teorema Aljabar Boolean.

Postulat Boolean :

1. $0 \cdot 0 = 0$
 2. $0 \cdot 1 = 0$
 3. $1 \cdot 0 = 0$
 4. $1 \cdot 1 = 1$
- di turunkan dari fungsi AND
5. $0 + 0 = 0$
 6. $0 + 1 = 1$
 7. $1 + 0 = 1$
 8. $1 + 1 = 1$
- di turunkan dari fungsi OR
9. $\bar{0} = 1$
 10. $\bar{1} = 0$
- diturunkan dari fungsi NOT



TEOREMA ALJABAR BOOLEAN

T1. COMMUTATIVE LAW :

$$a. A + B = B + A$$

$$b. A \cdot B = B \cdot A$$

T2. ASSOCIATIVE LAW :

$$a. (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$b. (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

T3. DISTRIBUTIVE LAW :

$$a. A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$b. A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

T4. IDENTITY LAW:

$$a. A + A = A$$

$$b. A \cdot A = A$$

T5. NEGATION LAW:

$$a. (A')' = A$$

$$b. (A'')' = A$$

T6. REDUNDANCE LAW :

$$a. A + A \cdot B = A$$

$$b. A \cdot (A + B) = A$$

T7. :

a. $0 + A = A$

b. $1 \cdot A = A$

c. $1 + A = 1$

d. $0 \cdot A = 0$

T8. :

a. $A' + A = 1$

b. $A' \cdot A = 0$

T9. :

a. $A + A' \cdot B = A + B$

b. $A \cdot (A' + B) = A \cdot B$

10. DE MORGAN'S THEOREM:

$$a. \overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$b. \overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B}$$

PEMBUKTIAN TEOREMA T6(a)



TABEL KEBENARAN UNTUK $A + A \cdot B = A$

A	B	$A \cdot B$	$A + A \cdot B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

PEMBUKTIAN TEOREMA T9(a)



TABEL KEBENARAN UNTUK $A + A' B = A + B$

A	B	$A' \cdot B$	$A + A' B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Aplikasi soal Aljabar Boole

Dari Postulat dan Teorema Aljabar Boolean diatas tujuan utamanya adalah untuk penyederhanaan :

- Ekspresi Logika
- Persamaan Logika
- Persamaan Boolean (Fungsi Boolean)

yang inti-intinya adalah untuk mendapatkan

Rangkaian Logika(Logic Diagram) yang paling sederhana.

Contoh 1

Sederhanakan $A . (A . B + C)$

Penyelesaian

$$A . (A . B + C) = A . A . B + A . C \quad (\text{T3a})$$

$$= A . B + A . C \quad (\text{T4b})$$

$$= A . (B + C) \quad (\text{T3a})$$

Contoh 2

Sederhanakan $A' . B + A . B + A' . B'$

Penyelesaian

$$A' . B + A . B + A' . B' = (A' + A) . B + A' . B' \quad (\text{T3a})$$

$$= 1 . B + A' . B' \quad (\text{T8a})$$

$$= B + A' . B' \quad (\text{T7b})$$

$$= B + A' \quad (\text{T9a})$$

Contoh 3

Sederhanakan $A + A . B' + A' . B$

Penyelesaian

$$A + A . B' + A' . B = (A + A . B') + A' . B$$

$$= A + A' . B \quad (\text{T6a})$$

$$= A + B \quad (\text{T9a})$$

Contoh 2

Sederhanakan $A' . B + A . B + A' . B'$

Penyelesaian

$$A' . B + A . B + A' . B' = (A' + A) . B + A' . B' \quad (\text{T3a})$$

$$= 1 . B + A' . B' \quad (\text{T8a})$$

$$= B + A' . B' \quad (\text{T7b})$$

$$= B + A' \quad (\text{T9a})$$

Contoh 3

Sederhanakan $A + A . B' + A' . B$

Penyelesaian

$$A + A . B' + A' . B = (A + A . B') + A' . B$$

$$= A + A' . B \quad (\text{T6a})$$

$$= A + B \quad (\text{T9a})$$

Soal Latihan I :

Sederhanakan ekspresi logika dibawah dengan Aljabar Boolean :

1. $AB' + BC + C'A$
2. $A'(BC + AB + BA')$
3. $ABC + AB + A$
4. $(A' + AB)(A'B)$
5. $BC + AD + ABCD + ADC + A'$

Soal Latihan II :

BUATLAH TABEL KEBENARAN DARI PERSAMAAN LOGIKA DIBAWAH:

(a) $X \cdot Y + X' \cdot Y + X' \cdot Y' = X' + Y$

(b) $A \cdot B \cdot C + A \cdot C + B \cdot C = A + B + C$

(c) $(X' \cdot Y + Y' \cdot X) + X \cdot Y = (X \cdot Y')$

(d) $A \cdot B \cdot D + A' \cdot B' \cdot D + A \cdot B' \cdot D' = A \cdot (B' \cdot D' + B \cdot D)$

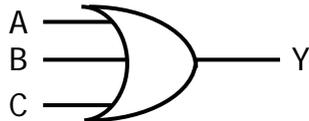
PENGGUNAAN GERBANG LOGIKA

1. Penyusunan Rangkaian dari Aljabar Boolean

Aljabar Boole merupakan dasar dalam menyusun rangkaian logika. Sebagai contoh kita mempunyai ekspresi/aljabar Boole sbb:

$$Y = A + B + C$$

Dari aljabar Boole ini kita dapat menyusunnya menjadi rangkaian logika dengan gerbang OR 3 masukan, karena jelas-jelas merupakan operasi penjumlahan. Sehingga rangkaian logikanya adalah sbb:

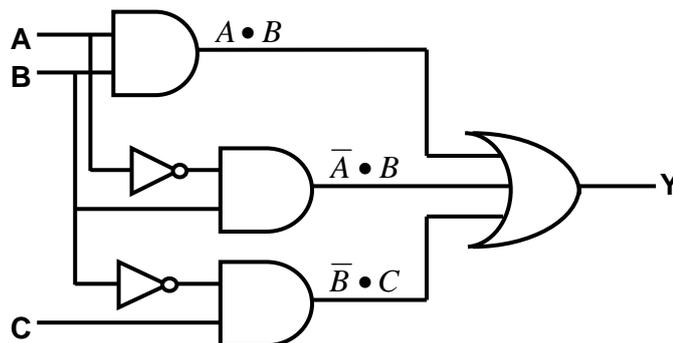


Untuk ekspresi Boole yang merupakan perpaduan antara operasi AND dan OR kita harus menyelesaikan satu persatu. Sebagai contoh, misal kita mempunyai aljabar Boole sbb:

$$Y = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B} \cdot C$$

Dari aljabar Boole tersebut jelas bahwa rangkaian terdiri dari 3 buah gerbang AND 2 masukan, 2 buah gerbang OR 2 masukan dan 2 buah gerbang NOT.

Untuk menggambarkan rangkaian logikanya adalah sbb:



Dari rangkaian logika terlihat bahwa kita harus meng-AND-kan setiap masukan, kemudian keluarannya barulah kita OR-kan.

Latihan

Buatlah rangkaian logika jika kita mempunyai aljabar Boolean sbb:

1. $Y = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$
2. $Y = \bar{A} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$

2. Aljabar/Ekspresi Boolean Maksterm (Perkalian dari Penjumlahan / AND-OR)

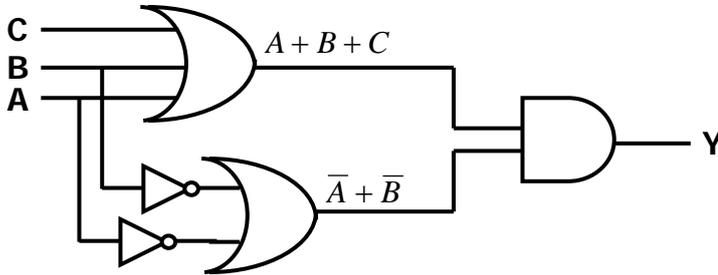
Ekspresi Boolean Maksterm merupakan perpaduan antara OR dan AND, yaitu merupakan operasi AND dari OR,

Artinya: "kita harus melakukan operasi-operasi OR terlebih dahulu kemudian dari hasil operasi OR tersebut kita AND-kan"

Sebagai contoh:

$$Y = (A + B + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$

Untuk membuat rangkaian logika kita membutuhkan sebuah gerbang AND, 2 buah gerbang OR dan 2 buah gerbang NOT.
Rangkaian logikanya adalah sbb:



3. Ekspresi Boolean Minterm (Penjumlahan dari Perkalian / OR-AND)

Untuk ekspresi Boolean minterm merupakan kebalikan dari operasi Maksterm, yaitu merupakan ekspresi OR-AND, Artinya: " Kita harus melakukan operasi-operasi AND terlebih dahulu kemudian hasil operasi AND kita OR-kan".

Latihan

- Buatlah rangkaian logikanya dari aljabar Boolean Maksterm berikut ini:
 - $Y = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$
 - $Y = (A + B) \cdot \bar{C}$
- Buatlah rangkaian logikanya dari aljabar Boolean Minterm berikut ini:
 - $Y = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot \bar{B})$
 - $Y = (\bar{A} \cdot B) + \bar{C}$

4. Tabel Kebenaran dan Aljabar Boolean

Untuk menggambarkan rangkaian logika selain menggunakan dasar aljabar Boole, kita juga dapat menggunakan dasar dari tabel kebenaran. Untuk dapat menggunakan tabel kebenaran sebagai dasar penggambaran rangkaian logika, terlebih dahulu dari tabel kebenaran diubah dahulu ke dalam bentuk aljabar Boole.

Sebagai contoh:

Masukan			Keluaran
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

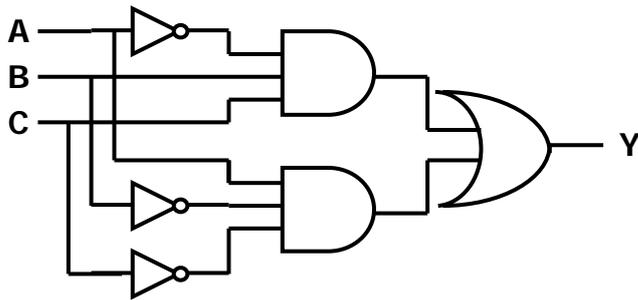
$$\bar{A} \cdot B \cdot C = 1$$

$$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = 1$$

Jadi aljabar Booleanya adalah:

$$Y = (\bar{A} \cdot B \cdot C) + (A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C})$$

Rangkaian logikanya adalah sbb:



Latihan

Buatlah tabel kebenaran dan rangkaian logika untuk aljabar Boole berikut ini:

- a. $Y = \bar{A} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$
- b. $Y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
- c. $Y = A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$
- d. $Y = A \cdot B \cdot C + \hat{A} \cdot \bar{B} \cdot C$

5. Penyederhanaan Aljabar Boolean

Penyederhanaan aljabar Boole bertujuan untuk menyederhanakan pemakaian gerbang-gerbang logika dalam pembuatan rangkaian logika. Sebagai contoh, kita mempunyai aljabar Boole sbb:

$$Y = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} + A \cdot B$$

Menurut aljabar Boole di atas jelas sekali bahwa untuk membuat rangkaian logikanya kita membutuhkan: 2 buah gerbang OR 3 masukan, 3 buah gerbang AND 2 masukan dan 2 buah pembalik (NOT).

Coba Buatlah rangkaian Logikanya

Tabel kebenaran untuk aljabar Boole di atas adalah:

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \cdot B$	$A \cdot \bar{B}$	$A \cdot B$	Y
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1

Dari tabel kebenaran terlihat bahwa keluaran (Y) tidak lain adalah merupakan operasi OR antara kedua masukan (A dan B), sehingga aljabar Boole di atas dapat disederhanakan menjadi

$$Y = A + B$$

Dengan aljabar Boole yang sederhana ini dapat kita buat rangkaian logika yang paling sederhana, yaitu hanya membutuhkan sebuah gerbang OR 2 masukan saja.

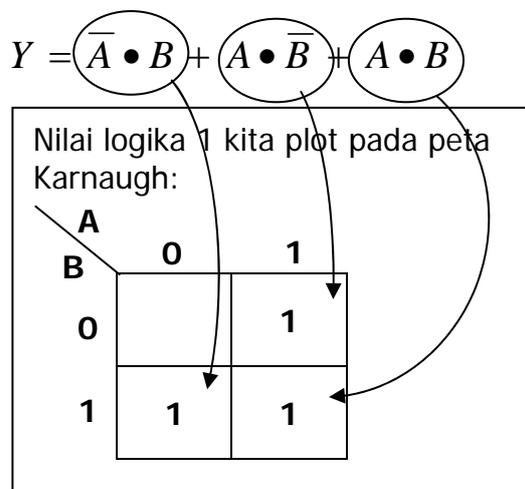
Coba Buatlah rangkaian Logika sederhananya

6. Map Karnaugh

Map Karnaugh adalah suatu cara untuk menyederhanakan aljabar Boolean. Untuk melakukan penyederhanaan dengan Map Karnaugh ada beberapa tahapan, yaitu:

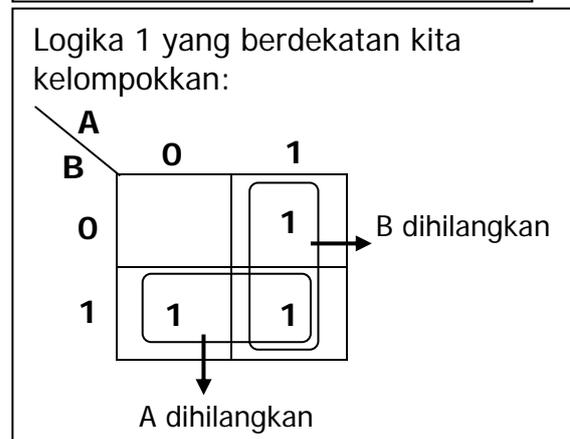
- Mulailah dengan aljabar Boolean Minterm (OR-AND)
- Tuliskan keluaran yang bernilai 1 pada peta Karnaugh
- Kelompokkan / lingkari nilai 1 yang berdekatan (bisa 2 bh, 4 bh atau 8 bh)
- Sederhanakan dengan menghilangkan unsur dari 1 tersebut dengan komplementnya dalam 1 kelompok/lingkaran
- Sisa dari penyederhanaan kemudian di-OR-kan
- Tuliskan aljabar Boole yang sudah disederhanakan

Sebagai contoh:



Tabel kebenaran dari aljabar Boole tersebut adalah:

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Sehingga diperoleh:
 $Y = A + B$

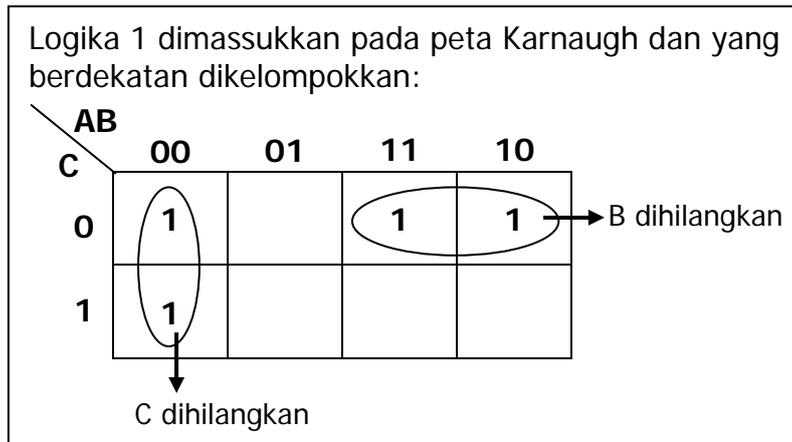
7. Map karnaugh untuk 3 masukan

Seperti halnya pada peta Karnaugh 2 masukan, untuk 3 masukan kita tinggal menambahkan 1 masukan lagi.

Sebagai contoh:

$$Y = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$$

Dengan mengikuti langkah-langkah seperti yang telah disebutkan di atas, kita masukan nilai logika 1 pada peta Karnaugh 3 masukan



Sehingga kita peroleh:

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{C}$$

Kita juga bisa mengembangkan lagi untuk 4 masukan, yaitu dengan menambahkan 2 baris lagi pada Map Karnaugh 3 masukan

8. Map Karnaugh dengan 5 masukan

Untuk membuat Map Karnaugh dengan 5 masukan kita lakukan dengan membuat 2 buah Map Karnaugh 4 masukan, kemudian dari kedua Map Karnaugh 4 masukan tersebut ditimpakan atas-bawah.

Sebagai contoh, misalkan kita mempunyai aljabar Boole sbb:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}CD\bar{E} + \bar{A}BC\bar{D}\bar{E} + \bar{A}BCD\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}DE + \bar{A}\bar{B}CDE + \bar{A}BCDE$$

